

PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

- Phép đếm
- Giải tích tổ hợp
- Nguyên lý chuồng bồ câu (Pigeonhole principle)

PHÉP ĐẾM

- Nguyên lý cộng
- Nguyên lý bù trừ
- Nguyên lý nhân

NGUYÊN LÝ CỘNG

- Nếu một quá trình có thể thực hiện bằng hai giai đoạn loại trừ lẫn nhau, sao cho có m cách để thực hiện giai đoạn 1 và có n cách để thực hiện giai đoạn 2. Khi đó có $n+m$ cách khác nhau để thực hiện toàn bộ quá trình.
- Phát biểu dựa trên lý thuyết tập hợp
 - $|A \cup B| = |A| + |B|$ Nếu $A \cap B = \emptyset$
 - $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|$ nếu $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$

NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

- Cho hai tập hữu hạn bất kỳ, khi đó

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- Nếu $B \subseteq A$ Thì $|A| = |B| + |\overline{B}|$

NGUYÊN LÝ NHÂN

- Nếu một quá trình có thể thực hiện theo hai giai đoạn liên tiếp, sao cho có m cách để thực hiện giai đoạn 1 và mỗi lựa chọn trong giai đoạn 1 đều có n cách khác nhau để thực hiện giai đoạn 2. Khi đó có mn cách khác nhau để thực hiện toàn bộ quá trình.
- **Tổng quát:** Nếu mỗi thành phần a_i của bộ có thứ tự k thành phần $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ có n_i khả năng chọn ($i=1, \dots, k$) thì số bộ sẽ được tạo ra là tích số của các khả năng này $n_1 \cdot n_2 \dots n_k$.

NGUYÊN LÝ NHÂN

- Hệ quả: $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \dots \times |A_n|$

NGUYÊN LÝ LÝ NHÂN

- **Ví dụ** Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 hoặc là bắt đầu bằng 00 hoặc là kết thúc bằng 11
- **Giải** Chia tập B các xâu cần đếm thành hai tập B_1, B_2
 - $B_1 = \{00b_3 \dots b_{10}\}, \Rightarrow |B_1| = 2^8$ (áp dụng nguyên lý nhân)
 - $B_2 = \{b_1 \dots b_8 11\}, \Rightarrow |B_2| = 2^8$
 - $B_1 \cap B_2 = \{00b_3 \dots b_8 11\}, \Rightarrow |B_1 \cap B_2| = 2^6$
 - Ta có $|B| = |B_1| + |B_2| - |B_1 \cap B_2| = 2^8 + 2^8 - 2^6 = 448$

GIẢI TÍCH TỔ HỢP

- Chỉnh hợp
- Hoán vị
- Tổ hợp
- Chỉnh hợp và tổ hợp lặp

CHỈNH HỢP

- Một chỉnh hợp chập k của n phần tử, là một bộ có thứ tự gồm k thành phần lấy từ n phần tử đã cho, các thành phần không được lặp lại
- Một số chỉnh hợp chập 2 của 3 phần tử a_1, a_2, a_3 là
 $(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_3), (a_3, a_2), \dots$
- Có thể coi một chỉnh hợp chập k của tập S có n phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự k phần tử của n phần tử của S

CHỈNH HỢP

- **Định Lý** Số chỉnh hợp chập k của tập S có n phần tử là
$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = n!/(n-k)!$$
- **Chứng minh** Giả sử $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, một chỉnh hợp chập k của n phần tử của S có dạng $(r_1, r_2, \dots, r_k)$, $r_i \in S$. Hơn nữa theo định nghĩa thì
 - r_1 có thể chọn n cách (giá trị)
 - r_2 có thể chọn n-1 cách, vì không được lặp lại giá trị của r_1 vv..
 - r_k có thể chọn n- k+1 cách, vì không được lặp lại giá trị của $r_1, r_2, \dots, r_{k-1}$
 - Vậy theo nguyên lý nhân số bộ (số chỉnh hợp) là $n(n-1)\dots(n-k+1)$

CHỈNH HỢP

- **Ví dụ** Có 8 VĐV chạy thi, người thắng cuộc được trao huy chương vàng, người về đích thứ hai được trao huy chương bạc, người về thứ ba sẽ được nhận huy chương đồng. Hỏi có bao nhiêu cách trao bộ huy chương này, nếu tất cả các kết cục cuộc thi đều có thể xảy ra.
- **Giải** Một kết cục để trao huy chương là một bộ ba $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ trong đó λ_1 là người nhận HCV, λ_2 là người nhận HCB và λ_3 là người nhận HCD. Rõ ràng $\lambda_i \neq \lambda_j$. Như vậy một kết cục là một chỉnh hợp chập 3 của 8. Số các chỉnh hợp này là số cách trao bộ huy chương. Nghĩa là $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

HOÁN VỊ

- Một hoán vị của n phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự của n phần tử đó
- Một số hoán vị của bốn phần tử 1, 2, 3, 4 là
1234, 1324, 1423,....
- **Lưu ý** Một hoán vị của n phần tử cũng có thể coi là một bộ có thứ tự gồm n thành phần lấy từ n phần tử đã cho

HOÁN VỊ

- **Định lý** Số hoán vị của n phần tử, ký hiệu p_n , là

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots 2.1 = n!$$

- **Chứng minh** Rõ ràng hoán vị là trường hợp riêng của chỉnh hợp nên

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1) = n!$$

TỔ HỢP

- Một tổ hợp chập k của n phần tử, là một bộ không có thứ tự gồm k thành phần khác nhau lấy từ n phần tử đã cho
- Nói cách khác một tổ hợp chập k của n phần tử là một tập con k phần tử của nó
- Một số tổ hợp chập 2 của tập 3 phần tử a_1, a_2, a_3 là
 $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}$

TỔ HỢP

- **Định Lý** Số tổ hợp chập k của tập S có n phần tử, ký hiệu C_n^k , là $C_n^k = n!/[k!(n-k)!]$
- **Chứng minh** Đếm A_n^k thông qua C_n^k
 - Chọn tùy ý một tổ hợp chập k của n, số cách chọn này là C_n^k
 - Với mỗi tổ hợp $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ chập k của S, sẽ có k! chỉnh hợp chập k của n tương ứng
 - Theo nguyên lý nhân suy ra $A_n^k = C_n^k \cdot k!$
 - Vậy $C_n^k = A_n^k/k! = [n(n-1)\dots(n-k+1)]/k! = n!/[k!(n-k)!]$

TỔ HỢP

- **Hệ quả**

- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, \quad n > k > 0$

- **Chứng minh ?**

- **Lưu ý** $C_n^0 = C_n^n = 1$

TỔ HỢP

- **Ví dụ 2** Giả sử một tổ bộ môn có 10 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách chọn hội đồng chấm LVTN gồm 6 ủy viên trong đó số ủy viên nam bằng số ủy viên nữ.
- **Giải** Một hội đồng gồm 3 nam và 3 nữ
 - Số cách chọn 3 nam trong 10 người là C_{10}^3
 - Số cách chọn 3 nữ trong 15 người là C_{15}^3
 - Theo nguyên lý nhân, số cách chọn HĐ là $C_{10}^3 \cdot C_{15}^3 = 45600$

CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP LẶP

- Chỉnh hợp lặp
- Tổ hợp lặp

CHỈNH HỢP LẶP

- Một chỉnh hợp lặp chập k của n là một bộ có thứ tự gồm k thành phần lấy từ n phần tử đã cho, các thành phần có thể được lặp lại
- Một số chỉnh hợp lặp chập 2 của 3 phần tử a_1, a_2, a_3 là $(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_3), \dots$

CHỈNH HỢP LẶP

- **Định lý** Số chỉnh hợp lặp chập k của n , ký hiệu $\overline{A}_n^k$, là

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

- **Chứng minh** Xét tập S gồm n phần tử. Một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử của S là một bộ $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $a_i \in S$. Nghĩa là một phần tử của tích Descartes $S \times S \times \dots \times S = S^k$
- Vậy $\overline{A}_n^k = |S \times S \times \dots \times S| = |S^k| = n^k$

TỔ HỢP LẶP

- Một tổ hợp lặp chập k của n là một bộ không có thứ tự gồm k thành phần lấy từ n phần tử đã cho, các thành phần có thể được lặp lại.
- Một số tổ hợp lặp chập 2 của 3 phần tử a_1, a_2, a_3 là $[a_1, a_1], [a_2, a_2], [a_3, a_3], [a_1, a_2], [a_1, a_3], \dots$

TỔ HỢP LẬP

- **Ví dụ 1** Có bao nhiêu cách chọn 5 tờ giấy bạc từ một kết đọng tiền gồm những tờ 10\$, 20\$, 50\$ và 100\$. Giả sử, thứ tự mà các tờ tiền được chọn không quan trọng, các tờ tiền cùng loại là không phân biệt và mỗi loại có ít nhất 5 tờ.
- **Giải ?**

TỔ HỢP LẬP

- **Giải** Giả sử két có 4 ngăn, mỗi ngăn đựng 1 loại tiền

10\$	20\$	50\$	100\$
------	------	------	-------

- Một cách chọn 5 tờ tiền có thể là:

$$\begin{array}{ccccccc} * & | & * & * & | & * & | & * & \text{ứng với } \{p_1, p_3, p_4, p_6, p_8\} \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \end{array}$$

- Suy ra một cách chọn là một tổ hợp chập 5 của 8. Vậy số cách chọn 5 tờ giấy bạc là $C_8^5 = 8!/(5!.3!) = 56$

TỔ HỢP LẶP

- **Định lý** Số tổ hợp lặp chập k của n phần tử, ký hiệu $\overline{C}_n^k$, là $\overline{C}_n^k = C_{n-1+k}^k$
- **Chứng minh** Mỗi tổ hợp lặp chập k của n tương ứng với cách chọn k vị trí trong k+ n-1 vị trí. Trong đó n-1 vị trí còn lại biểu diễn cho các vị trí (vách ngăn) phân cách n phần tử (loại phần tử) của tập đã cho. Vậy số tổ hợp lặp chập k của n là

$$\overline{C}_n^k = C_{n-1+k}^k$$

TỔ HỢP LẶP

- **Ví dụ 2** Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

- **Giải** Mỗi nghiệm là một bộ (x_1, x_2, x_3) sao cho

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

- Suy ra, mỗi nghiệm tương ứng với một cách chọn 11 phần tử từ 3 (loại) phần tử, không thứ tự, không phân biệt
- Vậy số nghiệm nguyên là $\overline{C^{11}_3} = C^{11}_{13} = 13 \cdot 12 / 2 = 78$

NGUYÊN LÝ PIGEONHOLE

- **Định Lý 1** Nếu có không ít hơn $k+1$ vật được đặt vào k hộp thì tồn tại một hộp chứa 2 hoặc nhiều hơn 2 đồ vật
- **Định lý 2** (Nguyên lý Dirichlet tổng quát) Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì tồn tại một hộp chứa nhiều hơn hoặc bằng $\lceil N/k \rceil$ vật

NGUYÊN LÝ PIGEONHOLE

- **Ví dụ 1** Cần phải có tối thiểu bao nhiêu sinh viên ghi tên vào lớp Toán rời rạc để chắc chắn có ít nhất 6 người cùng điểm thi (thang điểm 10)
- **Giải** Gọi số SV đăng ký là N . Theo NL Dirichlet ta có
 - $\lceil N/11 \rceil \geq 6$
 - $6 \leq \lceil N/11 \rceil < N/11 + 1 \Rightarrow 5 < N/11 \Rightarrow N > 55$
- Vậy tối thiểu phải có 56 người đăng ký